数理解析研究所講究録
81巻 1970年 46-73

三値しきい値関数について

三根　久
(京都大学工学部数理工学教室)
藤田志郎
(津山工業高等専門学校)

On Three-Valued Threshold Functions

Hisashi Mine
(Faculty of Engineering, Kyoto University)
Shiro Fujita
(Tsuyama Technical College)

§ 序　論

二値しきい値関数の判定と実現に際しては，往々その重みは整数であると仮定されるが，二値論理の場合は，与えられた論理関数がしきい値関数であれば整数の重みが存在することが証明されている。[1] 三値しきい値関数の判定と実現に際しても，重みを整数と仮定する事によってその手法の展開が容易になることは十分考えられる。そこで，まず三値しきい値関数における公差（tolerance）を定義し，三値論理の場合も，与えられた論理関数がしきい値関数であれば整数の重みをもつことを示す。

つぎに，三値論理関数の特性パラメーターを定義し，しきい値関数はこのパラメーターと対応することを示す。さらに，特性パラメーターとしきい値関数の重み，しきい値等の間に成立するいくつかの性質について述べる。

§ 1. 三値しきい値関数

しきい値関数の定義

論理変数 x およびその関数 f の真理値は整数値 0，1，2 とする。真理値自身および他の実数値との四則演算を考える。また，大小関係は $0<1<2$ とする。

n 個の論理変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ は x_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ を i 座標

とする n 次元空間の点（格子点）とみなすと，$x_i = 0$ or 1 or 2 であるから，$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ はこの空間の 3^n 個の格子点に対応する。そこで，今後 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を X とかく。

n 変数の論理関数 $f(X)$ において

$$
\begin{array}{lll}
w(X) \geq T_2 & \text{ならば} & f(X) = 2 \\
T_2 > w(X) > T_0 & \text{ならば} & f(X) = 1 \\
T_0 \geq w(X) & \text{ならば} & f(X) = 0
\end{array}
\qquad (1)
$$

となる実定数 $w_1, w_2, \cdots, w_n, T_2, T_0$ $(T_2 > T_0)$ が存在するとき $f(X)$ をしきい値関数という。

ここで，　$w(X) = w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_nx_n$

であり，w_i を重み，T_2，T_0 をしきい値という。

$$F_2 = \{X \,;\, f(X) = 2\}, \quad F_1 = \{X \,;\, f(X) = 1\}, \quad F_0 = \{X \,;\, f(X) = 0\}$$

とすると，しきい値関数は n 次元空間における平行なる二つの超平面

$$w(X) = T_2, \qquad w(X) = T_0$$

が存在して，F_2，F_1，F_0 を分離していると考えうるので，

$$S = (w_1, w_2, \cdots, w_n \,;\, T_2, T_0)$$

をしきい値関数の分離系（separating system）という。とくに，(1) 式において $=$ のないときは完全分離系という。

つづいて本報告に必要な定義を述べる。

否　定

論理変数 x の否定を $\bar{x}$ とかき　$\bar{x} = 2 - x$　とする。

対称関数

$f(X)$ において

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_j \cdots, x_n) = f(x_1, x_2, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$$

のとき，x_i と x_j に関して対称であるという。任意の x_i，x_j（$1 \leq i, j \leq n$）に関して対称であるとき，$f(X)$ を対称関数という。

unate な関数

$f(X)$ において，$x_{i_1} = \alpha_1$，$x_{i_2} = \alpha_2, \cdots, x_{i_k} = \alpha_k$　（$\alpha_j = 0$ or 1 or 2）とした関数を

$$f_{i_1, i_2, \cdots, i_k}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)$$　とかく。

また，$f(X)$，$g(X)$ において

$F_2 \geq G_2$　，$F_2 \cup F_1 \geq G_2 \cup G_1$ が成立するとき

$f(X) \geq g(X)$　とする。

$f(X)$ において，

$f_i(0) \underset{(\geq)}{\leq} f_i(1) \underset{(\geq)}{\leq} f_i(2)$　が成立するとき

x_i に関して単調増加（減少）であるという。すべての x_i について単調増加または減少であるとき $f(X)$ を unate な関数という。

以下，しきい値関数について成立するいくつかの性質を述

べる。

[命題 1.1] $f(X)$ をしきい値関数とすると，その完全分離系は必ず存在する。

(証明) $f(X)$ の分離系を $S(w_1, w_2, \cdots, w_n ; T_2, T_0)$ とする。

いま，
$$L_2 = \min\{w(X) ; X \in F_2\} \quad , U_1 = \max\{w(X) ; X \in F_1\}$$
$$L_1 = \min\{w(X) ; X \in F_1\} \quad , U_0 = \max\{w(X) ; X \in F_0\}$$
とする。$T_2 \neq L_2$，$T_0 \neq U_0$ であれば，S 自身が完全分離系である。ゆえに，$L_2 = T_2$，$U_0 = T_0$ の場合を考える。

$\frac{1}{2}(L_2 - U_1) = C_2$ として $T_2' = T_2 - C_2$ とすると
$$w(X) \geq T_2 > T_2 - C_2 = T_2'$$
すなわち，$w(X) > T_2'$ のとき $f(X) = 2$ となる。

また明らかに，$T_2' > w(X) > T_0$ のとき $f(X) = 1$ である。

つぎに，$\frac{1}{2}(L_1 - U_0) = C_0$ として $T_0' = T_0 + C_0$ とすると
$$T_2' > w(X) > T_0' \qquad \text{のとき} \quad f(X) = 1$$
$$w(X) \leq T_0 < T_0 + C_0 = T_0' \qquad \text{のとき} \quad f(X) = 0 \quad \text{となる。}$$
ゆえに，$S'(w_1, w_2, \cdots, w_n ; T_2', T_0')$ は $f(X)$ の完全分離系である。

[定理 1.1] しきい値関数 $f(X)$ の分離系を $S(w_1, w_2, \cdots, w_n ; T_2, T_0)$ とする。このとき $f(x_1, x_2, \cdots, \overline{x_i}, \cdots, x_n)$ もまたしきい値関数であり，分離系は $S'(w_1, w_2, \cdots, -w_i, \cdots, w_n ; T_2 - 2w_i, T_0 - 2w_i)$ となる。

一般に，$f(\bar{X})=f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_i, \cdots, \bar{x}_n)$ もまたしきい値関数で，分離系は $(-w_1, -w_2, \cdots, -w_i, \cdots, -w_n ; T_2', T_0')$ となる。

ただし，$T_2' = T_2 - 2(w_1+w_2+\cdots+w_n)$

$T_0' = T_0 - 2(w_1+w_2+\cdots+w_n)$

（証明）$\bar{x}_i = 2 - x_i$ なるゆえに，

$w'(X') = w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + (-w_i)\bar{x}_i + \cdots + w_nx_n = w(X) - 2w_i$

となる。ここで，$w(X) \geq T_2$ ならば

$w'(X') \geq T_2 - 2w_i$ となり，このとき $f(X)=2$．

$T_2 > w(X) > T_0$ ならば

$T_2 - 2w_i > w'(X') > T_0 - 2w_i$ となり，このとき $f(X)=1$．

$T_0 \geq w(X)$ ならば

$T_0 - 2w_i \geq w'(X')$ となり，このとき $f(X)=0$．

したがって，$f(x_1, x_2, \cdots, \bar{x}_i, \cdots, x_n)$ の分離系は

$(w_1, w_2, \cdots, -w_i, \cdots, w_n ; T_2 - 2w_i, T_0 - 2w_i)$ で与えられる。

定理の後半はこの証明より明らかである。

つぎの命題はしきい値関数の定義より明らかである。

［命題 1.2］ しきい値関数 $f(X)$ の分離系を $(w_1, w_2, \cdots, w_i, \cdots, w_j, \cdots, w_n ; T_2, T_0)$ とする。$f(X)$ において x_i と x_j を入れかえた関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$ もまたしきい値関数で，その分離系は $(w_1, w_2, \cdots, w_j, \cdots, w_i, \cdots, w_n ; T_2, T_0)$ となる。

［命題 1.3］ $f(X)$ はしきい値関数とする。

もし，$S(w_1, w_2, \cdots, w_n ; T_2, T_0)$ と $S'(w_1', w_2', \cdots, w_n' ; T_2', T_0')$ が同時に $f(X)$ の分離系とすると，$S^*(w_1^*, w_2^*, \cdots, w_n^* ; T_2^*, T_0^*)$ もまた $f(X)$ の分離系となる。

ただし，
$$w_i^* = w_i + w_i' \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$
$$T_2^* = T_2 + T_2', \quad T_0^* = T_0 + T_0'$$

［定理 1.2］ $f(X)$ をしきい値関数とし，重みを w_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ とする。$\alpha > \beta$ なるすべての α, β $(\alpha, \beta = 0 \text{ or } 1 \text{ or } 2)$ に対して

$$w_i \geqq w_j \quad \text{ならば} \quad f_{ij}(\alpha, \beta) \geqq f_{ij}(\beta, \alpha)$$
$$w_i \leqq w_j \quad \text{ならば} \quad f_{ij}(\alpha, \beta) \leqq f_{ij}(\beta, \alpha)$$

が成立する $(i \neq j, \ n \geqq 2)$

（証明） $w_i \geqq w_j$ とする。もし，$\alpha > \beta$ ならば
$$\left\{\sum_{k \neq i,j} w_k x_k + w_i \alpha + w_j \beta\right\} - \left\{\sum_{k \neq i,j} w_k x_k + w_i \beta + w_j \alpha\right\}$$
$$= (w_i - w_j)(\alpha - \beta) \geqq 0$$

ゆえに，しきい値関数の定義より $f_{ij}(\alpha, \beta) \geqq f_{ij}(\beta, \alpha)$ をうる。後半も同様に示しうる。

§2. 公差

$f(X)$ をしきい値関数とし，その完全分離系を $S(w_1, w_2, \cdots, w_n ; T_2, T_0)$ とする。L_2, U_1, L_1, U_0 を［命題 1.1］におけるものと同じ記号とする。

$$m_2 = \min\{(L_2 - T_2), (T_2 - U_1)\}, \quad m_0 = \min\{(L_1 - T_0), (T_0 - U_0)\} \tag{2}$$

$$M_2 = |T_2| + 2\sum_{i=1}^{n}|w_i|, \quad M_0 = |T_0| + 2\sum_{i=1}^{n}|w_i| \tag{3}$$

とする。このとき任意の X に対して

$$|T_2| + \sum_{i=1}^{n}|w_i|x_i \leqq M_2, \quad |T_0| + \sum_{i=1}^{n}|w_i|x_i \leq M_0 \tag{4}$$

が成立する。

いま，

$$\min\{m_0/M_0, m_2/M_2\} > |\lambda_i|$$
$$m_0/M_0 > |\Lambda_0|, \quad m_2/M_2 > |\Lambda_2| \tag{5}$$

なる λ_i $(i=1, 2, \cdots, n)$，Λ_0，Λ_2 をとり

$$w_i' = (1+\lambda_i)w_i \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$
$$T_0' = (1+\Lambda_0)T_0, \quad T_2' = (1+\Lambda_2)T_2 \tag{6}$$

とする。

$X \in F_2$ に対しては $w(X) \geq L_2$ なるゆえに，

$w(X) - T_2 \geq L_2 - T_2 \geq m_2$ が成立する。

一方，この X に対して

$$w(X) - T_2' = \sum_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)w_i x_i - (1+\Lambda_2)T_2$$
$$= [w(X) - T_2] + [\sum_{i=1}^{n}\lambda_i w_i x_i - \Lambda_2 T_2].$$

最後の式の第一項 $\geq m_2$ であり，第二項については，

$$|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i w_i x_i - \Lambda_2 T_2| \leq \sum_{i=1}^{n}|\lambda_i||w_i|x_i + |\Lambda_2||T_2| < m_2/M_2 [\sum_{i=1}^{n}|w_i|x_i + |T_2|] \leq m_2$$

となる。したがって，$w'(X) > T_2'$ となる。

$X \in F_1$ とすると $U_1 \geq w(X) \geq L_1$ なるゆえに，

$T_2 - w(X) \geq T_2 - U_1 \geq m_2$，$w(X) - T_0 \geq L_1 - T_0 \geq m_0$

が成立する。

このXに対して　$T_2' - w'(X) = (1+\Lambda_2)T_2 - \sum_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)w_i x_i$

$$= [T_2 - w(X)] + [\Lambda_2 T_2 - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i w_i x_i]$$

最後の式の第一項 $\geq m_2$ であり，第二項については

$$|\Lambda_2 T_2 - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i w_i x_i| \leq |\Lambda_2||T_2| + \sum_{i=1}^{n}|\lambda_i||w_i|x_i < \frac{m_2}{M_2}\left[|T_2| + \sum_{i=1}^{n}|w_i|x_i\right] \leq m_2$$

となる。ゆえに，　$T_2' > w'(X)$　が成立する。

また，　$w'(X) - T_0' = \sum_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)w_i x_i - (1+\Lambda_0)T_0$

$$= [w(X) - T_0] + [\sum_{i=1}^{n}\lambda_i w_i x_i - \Lambda_0 T_0]$$

最後の式の第一項 $\geq m_0$，第二項については

$$|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i w_i x_i - \Lambda_0 T_0| \leq \sum_{i=1}^{n}|\lambda_i||w_i|x_i + |\Lambda_0||T_0| < \frac{m_0}{M_0}\left[\sum_{i=1}^{n}|w_i|x_i + |T_0|\right] \leq m_0$$

となる。したがって，　$w'(X) > T_0'$　をうる。

ゆえに，$X \in F_1$ なるXに対しては

$$T_2' > w'(X) > T_0'$$　が成立する。

$X \in F_0$ なるXに対しても全く同様にして

$$T_0' > w'(X)$$　を示しうる。

以上より，つぎの定理をうる。

［定理 2.1］ $f(X)$をしきい値関数とし，その完全分離系を

$$S(w_1, w_2, \cdots, w_n; T_2, T_0)$$　とする。

このとき　$S'(w_1', w_2', \cdots, w_n'; T_2', T_0')$　もまた$f(X)$の完全分離系となる。ただし，w_i' $(i=1, 2, \cdots, n)$，T_2'，T_0' は (6) 式によって与えられるものとする。

ここで，つぎの定義を述べる。

公差（tolerance）

$\tau(\mathfrak{S}) = \tau(w_1, w_2, \cdots, w_n; T_2, T_0) = \min\{ m_0/M_0, \ m_2/M_2 \}$

を分離系$\mathfrak{S}$の公差という．（$\mathfrak{S}$は完全分離系とする）

［命題 2.1］　$\tau(w_1, w_2, \cdots, w_n; T_2, T_0) \leq 1$

（証明）任意のXに対して $|w(X)| = 2\sum_{i=1}^{n}|w_i|$ なるゆえに，

明らかに　$|L_2| \leq 2\sum_{i=1}^{n}|w_i|$　が成立する。

$m_2 = L_2 - T_2 = |L_2| + |T_2| \leq 2\sum_{i=1}^{n}|w_i| + |T_2| = M_2$

ゆえに，　$m_2/M_2 \leq 1$

また，　$|U_0| \leq 2\sum_{i=1}^{n}|w_i|$　なるゆえに，

$m_0 = T_0 - U_0 \leq |T_0| + |U_0| = |T_0| + 2\sum_{i=1}^{n}|w_i| = M_0$

したがって，　$m_0/M_0 \leq 1$

ゆえに，　$\tau(w_1, w_2, \cdots, w_n; T_2, T_0) \leq 1$

［命題 2.2］　$f(X)$をしきい値関数とし，完全分離系を

$(w_1, w_2, \cdots, w_n; T_2, T_0)$　とする。

$C_2 = \frac{1}{2}(L_2 + U_1)$　，　$C_0 = \frac{1}{2}(L_1 + U_0)$　とすれば，

$\tau(w_1, w_2, \cdots, w_n; T_2, T_0) \leq \tau(w_1, w_2, \cdots, w_n; C_2, C_0)$

が成立する。

（証明）$(w_1, w_2, \cdots, w_n; C_2, C_0)$ が$f(X)$の完全分離系なることは明らかである。

$m_2^* = \frac{1}{2}(L_2 - U_1)$　$M_2^* = |C_2| + 2\sum_{i=1}^{n}|w_i|$　とすると

$$m_2^* = m_2 + |C_2 - T_2|$$ は明らかである。

また、 $|C_2| - |T_2| \leq |C_2 - T_2|$

ゆえに、 $|C_2| \leqq |C_2 - T_2| + |T_2|$ が成立する。

$$\frac{m_2}{M_2} \leq \frac{m_2 + |C_2 - T_2|}{M_2 + |C_2 - T_2|} = \frac{m_2^*}{|T_2| + 2\sum_{i=1}^{n}|w_i| + |C_2 - T_2|} \leqq \frac{m_2^*}{|C_2| + 2\sum_{i=1}^{n}|w_i|} = \frac{m_2^*}{M_2^*}$$

したがって、 $m_2/M_2 \leq m_2^*/M_2^*$ をうる。

つぎに、 $m_0^* = \frac{1}{2}(L_1 - U_0)$, $M_0^* = |C_0| + 2\sum_{i=1}^{n}|w_i|$ とすると、

$m_0^* = m_0 + |C_0 - T_0|$, $|C_0| = |C_0 - T_0| + |T_0|$ ゆえに、

$$\frac{m_0}{M_0} \leq \frac{m_0 + |C_0 - T_0|}{M_0 + |C_0 - T_0|} = \frac{m_0^*}{|T_0| + 2\sum_{i=1}^{n}|w_i| + |C_0 - T_0|} \leqq \frac{m_0^*}{|C_0| + 2\sum_{i=1}^{n}|w_i|} = \frac{m_0^*}{M_0^*}$$

したがって $m_0/M_0 \leqq m_0^*/M_0^*$

$$\tau(w_1, w_2, \cdots, w_n; T_2, T_0) = \min\{m_0/M_0, m_2/M_2\}$$

$$\tau(w_1, w_2, \cdots, w_n : C_2, C_0) = \min\{m_0^*/M_0^*, m_2^*/M_2^*\}$$

なるゆえに、

$$\tau(w_1, w_2, \cdots, w_n; T_2, T_0) \leq \tau(w_1, w_2, \cdots, w_n; C_2, C_0)$$

[定理 2.2] $f(X)$をしきい値関数とすると、整数の完全分離系をもつ。

(証明) $f(X)$の完全分離系を $S(w_1, w_2, \cdots, w_n; T_2, T_0)$ とする。

いま、これらが有理数でないとする。公差を $\tau(S)$ とする。

$|\lambda_i| < \tau(S)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, $|\Lambda_0| < \tau(S)$, $|\Lambda_2| < \tau(S)$

なる λ_i, Λ_0, Λ_2 を用いて

$$w_i' = (1+\lambda_i) w_i \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

$$T_0' = (1+\Lambda_0) T_0, \quad T_2' = (1+\Lambda_2) T_2$$

とすれば〔定理2.1〕より $(w_1', w_2', \cdots, w_n'; T_2', T_0')$ はまた $f(X)$ の完全分離系となる。そして，有理数の稠密性より λ_i, Λ_0, Λ_2 を適当にえらべば，w_i', T_2', T_0' を有理数としうる。

つぎに，α を有理数 w_i', T_2', T_0' の分母の最小公倍数とすると，$w_i^* = \alpha w_i'$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，$T_2^* = \alpha T_2'$，$T_0^* = \alpha T_0'$ は整数となる；また，$(w_1^*, w_2^*, \cdots, w_n^*; T_2^*, T_0^*)$ が $f(X)$ の完全分離系なることは明らかである。　　　　(証明終)

この定理は，しきい値関数は必ず整数の分離系をもつことを示している。

§3. 特性パラメーター

$f(X)$ において F_2, F_0 の数を $p(F_2)$, $p(F_0)$ で表わす。また，$F_2 \ni X$ なるすべての X の i 座標 (x_i) $(i=1, 2, \cdots, n)$ の和を $s_i(F_2)$ と記す。$s_i(F_0)$ についても同様とする。

$$\begin{aligned} &\{ s_i(F_2) - s_i(F_0) \} \quad (i=1, 2, \cdots, n) \\ &p(F_2), \quad p(F_0) \end{aligned} \tag{7}$$

で与えられる $(n+2)$ 個の数を $f(X)$ のパラメーターといい，

$$s_i(f) \quad (i=1, 2, \cdots, n), \quad p(f)_2, \quad p(f)_0$$ と記す。

〔定理 3.1〕 $f(X)$ を一つの論理関数とし，$g(X)$ を一つのし

きい値関数とする。もし，$f(X)$ と $g(X)$ のパラメーターが同じであれば，$f(X)=g(X)$ である。

（証明）$g(X)$ の完全分離系を $(w_1, w_2, \cdots, w_n ; T_2, T_0)$ とする。

いま，$f(X) \neq g(X)$ と仮定する。このときつぎの三つの場合が考えられる。

(i) $F_2 \neq G_2,\ F_0 = G_0$ (ii) $F_2 = G_2,\ F_0 \neq G_0$ (iii) $F_2 \neq G_2,\ F_0 \neq G_0$

(i) の場合

$p(F_2)=p(G_2)$ より $p(F_2 \cap G_1)=p(G_2 \cap F_1)=k$ とする。*

そして，
$$F_2 \cap G_1 \ni Z_1, Z_2, \cdots, Z_k$$
$$G_2 \cap F_1 \ni Y_1, Y_2, \cdots, Y_k \qquad \text{とする。}$$

いま，$G_2 \cap F_2 \neq \phi$ として
$$G_2 \cap F_2 \ni X_1, X_2, \cdots, X_j \qquad \text{とする。}$$

明らかに，
$$G_2 = \{X_1, X_2, \cdots, X_j, Y_1, Y_2, \cdots, Y_k\}$$
$$F_2 = \{X_1, X_2, \cdots, X_j, Z_1, Z_2, \cdots, Z_k\} \qquad \text{である。}$$

また，$G_0 = F_0 = \{X_1', X_2', \cdots, X_l'\}$ とする。

ここで，
$$X_r = (x_{r1}, x_{r2}, \cdots, x_{rn}) \quad (r=1, 2, \cdots, j)$$
$$Y_r = (y_{r1}, y_{r2}, \cdots, y_{rn}) \quad (r=1, 2, \cdots, k)$$
$$Z_r = (z_{r1}, z_{r2}, \cdots, z_{rn}) \quad (r=1, 2, \cdots, k)$$
$$X_r' = (x_{r1}', x_{r2}', \cdots, x_{rn}') \quad (r=1, 2, \cdots, l) \qquad \text{とする。}$$

$$S_i(F_2) - S_i(F_0) = S_i(G_2) - S_i(G_0) \quad \text{より}$$
$$\sum_{r=1}^{j} x_{ri} + \sum_{r=1}^{k} z_{ri} - \sum_{r=1}^{l} x_{ri}' = \sum_{r=1}^{j} x_{ri} + \sum_{r=1}^{k} y_{ri} - \sum_{r=1}^{l} x_{ri}' \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

* $P(A)$ は集合 A の個数を表わす。

ゆえに、 $$\sum_{r=1}^{k} z_{ri} = \sum_{r=1}^{k} y_{ri} \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{8}$$

が成立する。（$G_2 \cap F_2 = \phi$ ならば明らかに (8) は成立する）

ところが、 $G_2 \ni Y_1, Y_2, \cdots, Y_k$, $G_1 \ni Z_1, Z_2, \cdots, Z_k$

なるゆえに $w(Y_r) > T_2$ $(r=1,2,\cdots,k)$ となる k 個の

式を辺々加えて $$\sum_{i=1}^{n} \left[w_i \sum_{r=1}^{k} y_{ri} \right] > kT_2 \tag{9}$$

をうる。また、$T_2 > w(Z_r)$ $(r=1,2,\cdots,k)$ なる k 個の

式を辺々加えて $$kT_2 > \sum_{i=1}^{n} \left[w_i \sum_{r=1}^{k} z_{ri} \right] \tag{10}$$

をうる。(8)式を考慮すれば (9) と (10) は明らかに矛盾である。

(ii) の場合

(i) と全く同様にして矛盾を導きうる。

(iii) の場合

$p(G_2) = p(F_2)$ より $p[F_2 \cap (G_1 \cup G_0)] = p[G_2 \cap (F_1 \cup F_0)] = k$ と

する。ゆえに、 $G_2 \cap (F_1 \cup F_0) \ni Y_1, Y_2, \cdots, Y_k$

$F_2 \cap (G_1 \cup G_0) \ni Z_1, Z_2, \cdots, Z_k$ とする。

$G_2 \cap F_2 \neq \phi$ ならば $G_2 \cap F_2 \ni X_1, X_2, \cdots, X_j$ として

$$G_2 = \{X_1, X_2, \cdots, X_j, Y_1, Y_2, \cdots, Y_k\}$$

$$F_2 = \{X_1, X_2, \cdots, X_j, Z_1, Z_2, \cdots, Z_k\}$$ となる。

また、$p(G_0) = p(F_0)$ より

$p[G_0 \cap (F_2 \cup F_1)] = p[F_0 \cap (G_2 \cup G_1)] = m$ とする。

$G_0 \cap (F_2 \cup F_1) \ni Y_1', Y_2', \cdots, Y_m'$, $F_0 \cap (G_2 \cup G_1) \ni Z_1', Z_2', \cdots, Z_m'$

$G_0 \cap F_0 \neq \phi$ の場合は

$$G_0 \cap F_0 \ni X_1', X_2', \cdots, X_l' \quad とすると,$$

$$G_0 = \{X_1', X_2', \cdots, X_l', Y_1', Y_2', \cdots, Y_m'\}$$

$$F_0 = \{X_1', X_2', \cdots, X_l', Z_1', Z_2', \cdots, Z_m'\} \quad をうる。$$

ここで,
$$X_r = (x_{r1}, x_{r2}, \cdots, x_{rn}) \quad (r=1, 2, \cdots, j)$$
$$Y_r = (y_{r1}, y_{r2}, \cdots, y_{rn}) \quad (r=1, 2, \cdots, k)$$
$$Z_r = (z_{r1}, z_{r2}, \cdots, z_{rn}) \quad (r=1, 2, \cdots, k)$$
$$X_r' = (x_{r1}', x_{r2}', \cdots, x_{rn}') \quad (r=1, 2, \cdots, l)$$
$$Y_r' = (y_{r1}', y_{r2}', \cdots, y_{rn}') \quad (r=1, 2, \cdots, m)$$
$$Z_r' = (z_{r1}', z_{r2}', \cdots, z_{rn}') \quad (r=1, 2, \cdots, m)$$

さて, $S_i(G_2) - S_i(G_0) = S_i(F_2) - S_i(F_0)$ より

$$\sum_{r=1}^{j} x_{ri} + \sum_{r=1}^{k} y_{ri} - \sum_{r=1}^{l} x_{ri}' - \sum_{r=1}^{m} y_{ri}'$$
$$= \sum_{r=1}^{j} x_{ri} + \sum_{r=1}^{k} z_{ri} - \sum_{r=1}^{l} x_{ri}' - \sum_{r=1}^{m} z_{ri}' \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

をうる。ゆえに

$$\sum_{r=1}^{k} y_{ri} - \sum_{r=1}^{m} y_{ri}' = \sum_{r=1}^{k} z_{ri} - \sum_{r=1}^{m} z_{ri}' \quad (i=1, 2, \cdots, n) \qquad (11)$$

をうる。($G_2 \cap F_2 = \phi$, $G_0 \cap F_0 = \phi$ の一方または両方が成立するときも (11) は明らかに成立する。)

$$G_2 \ni Y_1, Y_2, \cdots, Y_k \qquad G_1 \cup G_0 \ni Z_1, Z_2, \cdots, Z_k$$

$$G_0 \ni Y_1', Y_2', \cdots, Y_m' \qquad G_2 \cup G_1 \ni Z_1', Z_2', \cdots, Z_m'$$

なるゆえに, $w(Y_r) > T_2 \quad (r=1, 2, \cdots, k)$

なるk個の式を辺々加えて

$$\sum_{i=1}^{n}\left[w_i \sum_{r=1}^{k} y_{ri}\right] > kT_2 \qquad (12)$$

をうる。　$T_2 > w(Z_r)$　$(r=1, 2, \cdots, k)$　なるk個の式を辺々加えて、

$$kT_2 > \sum_{i=1}^{n}\left[w_i \sum_{r=1}^{k} z_{ri}\right] \qquad (13)$$

をうる。また、$T_0 > w(Y_r')$　$(r=1, 2, \cdots, m)$　なるm個の式を辺々加えて

$$mT_0 > \sum_{i=1}^{n}\left[w_i \sum_{r=1}^{m} y'_{ri}\right] \qquad (14)$$

となる。最後に、$w(Z_r') > T_0$　$(r=1, 2, \cdots, m)$　なるm個の式を辺々加えて

$$\sum_{i=1}^{n}\left[w_i \sum_{r=1}^{m} z'_{ri}\right] > mT_0 \qquad (15)$$

をうる。(12) と (14) より

$$\sum_{i=1}^{n}\left[w_i\left\{\sum_{r=1}^{k} y_{ri} - \sum_{r=1}^{m} y'_{ri}\right\}\right] > (kT_2 - mT_0) \qquad (16)$$

(13) と (15) より

$$(kT_2 - mT_0) > \sum_{i=1}^{n}\left[w_i\left\{\sum_{r=1}^{k} z_{ri} - \sum_{r=1}^{m} z'_{ri}\right\}\right] \qquad (17)$$

をうる。(11) 式を考慮すると (16) と (17) は明らかに矛盾である。したがって、$f(X) = g(X)$　となる。

つぎの系は明らかである。

［系 3.1］ 二つの異なった関数 $f(X)$, $g(X)$ が同じパラメーターをもつならば，どちらもしきい値関数でない。

［系 3.2］ しきい値関数はそのパラメーターと一対一対応する。

［系 3.2］によって，この $(n+2)$ 個のパラメーターはしきい値関数を特徴づけるものと考えうるので，これを特性パラメーター（characterizing parameters）という。

以下，特性パラメーターについて成立するいくつかの性質を述べる。

［命題 3.1］ 任意の論理関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$ と $g(y_1, y_2, \cdots, y_i, \cdots, y_n) = f(x_1, x_2, \cdots, \overline{x_i}, \cdots, x_n)$ に対して，

$$p(g)_2 = p(f)_2 \qquad p(g)_0 = p(f)_0$$

$$s_i(g) = 2(p(f)_2 - p(f)_0) - s_i(f) \quad , \quad s_k(g) = s_k(f) \quad (k \neq i)$$

が成立する。

（証明） $p(g)_2 = p(f)_2$, $p(g)_0 = p(f)_0$ は明らかである。

$$s_i(g) = s_i(G_2) - s_i(G_0) = \sum_{Y \in G_2} y_i - \sum_{Y \in G_0} y_i$$

$$= \sum_{X \in F_2} (2 - x_i) - \sum_{X \in F_0} (2 - x_i) = 2(p(f)_2 - p(f)_0) - (s_i(F_2) - s_i(F_0))$$

$$= 2(p(f)_2 - p(f)_0) - s_i(f)$$

$k \neq i$ のとき $s_k(g) = s_k(f)$ は明らかである。

つぎの命題も明らかである。

［命題 3.2］ $f(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_n)$ に対して

$g(y_1, y_2, \cdots, y_i, \cdots, y_j, \cdots, y_n) = f(x_1, x_2, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$ とするとき

$$p(g)_2 = p(f)_2, \quad p(g)_0 = p(f)_0$$

$$S_i(g) = S_j(f), \quad S_j(g) = S_i(f)$$

$$S_k(g) = S_k(f) \quad (k \neq i, j)$$

が成立する。

［定理 3.2］ unate な関数 $f(X)$ が x_i について独立ならば

$$S_i(f) = p(f)_2 - p(f)_0$$

が成立する。また，その逆も成立する。

ここで，x_i について独立とは $f_i(0) = f_i(1) = f_i(2)$ を意味する。

（証明） x_i について独立であるから，もし，$f_i(2) = 2$ であれば，必ず $f_i(1) = f_i(0) = 2$ となる。

ゆえに，$S_i(F_2) = p(f)_2$

また，$f_i(2) = 0$ であれば，必ず $f_i(1) = f_i(0) = 0$ となる。

ゆえに，$S_i(F_0) = p(f)_0$

したがって，$S_i(f) = S_i(F_2) - S_i(F_0) = p(f)_2 - p(f)_0$

逆に，$f(X)$ は unate であり，かつ

$S_i(f) = p(f)_2 - p(f)_0$ とする。

いま，$f_i(0) \neq f_i(1) \neq f_i(2)$ と仮定する。

$f_i(0) = 1$ のとき $f_i(2) = 2$ となる個数を l

$f_i(0) = 0$ のとき $f_i(2) = 2$ となる個数を m

$f_i(0)=0$ のとき $f_i(2)=1$ となる個数を n とする。

条件と、パラメーターの定義を考慮して

$$(2l+2m)-(0\cdot m+0\cdot n)=(l+m)-(m+n)$$

をうる。ゆえに、

$$l+2m+n=0$$

したがって、$l=m=n=0$ をうる。

ゆえに、$f_i(0)=2$ ならば $f_i(2)=2$

$f_i(0)=1$ ならば $f_i(2)=1$

$f_i(0)=0$ ならば $f_i(2)=0$ をうる。

これは、$f(X)$ が x_i について独立であることを示している。

$f_i(0)\geq f_i(1)\geq f_i(2)$ の場合も全く同様にして示しうる。

つぎの命題は[命題 3.2]より明らかである。

[命題 3.3] $f(X)$ において x_i と x_j に関して対称ならば、

$$\zeta_i(f)=\zeta_j(f)$$ が成立する。

[定理 3.3] $f(X)$ はつぎの条件をみたすものとする。

すなわち、$\alpha>\beta$ なるすべての α, β ($\alpha,\beta=0$ or 1 or 2) について $f_{ij}(\alpha,\beta)\geq f_{ij}(\beta,\alpha)$ が成立するか、

または、$f_{ij}(\alpha,\beta)\leq f_{ij}(\beta,\alpha)$ が成立するかで

$\alpha>\beta$ なるすべての α, β ($\alpha,\beta=0$ or 1 or 2) について、

あるとする。

このとき、$\zeta_i(f)=\zeta_j(f)$ ならば、$f(X)$ は x_i と x_j に関して対称である。

（証明） いま， $f_{ij}(\alpha, \beta) \geq f_{ij}(\beta, \alpha)$ が成立しているとする。 (α, β) は $(1, 0)$，$(2, 0)$，$(2, 1)$ の3通りであるから，

$$f_{ij}(1,0)=2 \text{ で } \begin{cases} f_{ij}(0,1)=1 & \text{が } k_1 \text{ 個} \\ f_{ij}(0,1)=0 & \text{が } k_2 \text{ 個} \end{cases}$$

$$f_{ij}(1,0)=1 \text{ で } f_{ij}(0,1)=0 \text{ が } k_3 \text{ 個}$$

$$f_{ij}(2,0)=2 \text{ で } \begin{cases} f_{ij}(0,2)=1 & \text{が } l_1 \text{ 個} \\ f_{ij}(0,2)=0 & \text{が } l_2 \text{ 個} \end{cases}$$

$$f_{ij}(2,0)=1 \text{ で } f_{ij}(0,2)=0 \text{ が } l_3 \text{ 個}$$

$$f_{ij}(2,1)=2 \text{ で } \begin{cases} f_{ij}(1,2)=1 & \text{が } m_1 \text{ 個} \\ f_{ij}(1,2)=0 & \text{が } m_2 \text{ 個} \end{cases}$$

$$f_{ij}(2,1)=1 \text{ で } f_{ij}(1,2)=0 \text{ が } m_3 \text{ 個}$$

とする。条件と，パラメーターの定義より

$$(k_1+k_2+2l_1+2l_2+2m_1+2m_2)-(m_2+m_3)$$
$$=(m_1+m_2)-(k_2+k_3+2l_2+2l_3+2m_2+2m_3)$$

が成立する。ゆえに，

$$k_1+2k_2+k_3+2l_1+4l_2+2l_3+m_1+2m_2+m_3=0$$

したがって，$k_1=k_2=k_3=l_1=l_2=l_3=m_1=m_2=m_3=0$ をうる。

すなわち，$f_{ij}(\alpha,\beta)=f_{ij}(\beta,\alpha)$ をうる。これは，x_i と x_j に関して対称なることを示している。

$f_{ij}(\alpha,\beta) \leq f_{ij}(\beta,\alpha)$ が成立するときも同様に示しうる。

§ 4. 正準関数

まず，定義から述べる。

正準関数 (canonical function)

$$\begin{aligned}&(1)\quad \zeta_i(f) \geq p(f)_2 - p(f)_0 \quad (i=1,2,\cdots,n)\\ &(2)\quad \zeta_i(f) \leq \zeta_j(f) \quad (i<j)\end{aligned} \qquad (18)$$

が成立するとき，$f(X)$を正準関数という。

正準な分離系

$f(X)$をしきい値関数とし，その完全分離系を

$$\zeta(w_1, w_2, \cdots, w_n;\ T_2, T_0) \quad \text{とする。}$$

もし，$0 \leq w_1 \leq w_2 \leq \cdots \leq w_n$ ならば，分離系ζは正準(canonical)であるという。

とくに，

$$\begin{aligned}&\zeta_i(f) = p(f)_2 - p(f)_0 \quad \text{ならば}\quad w_i = 0\\ &\zeta_i(f) = \zeta_j(f) \quad \text{ならば}\quad w_i = w_j\end{aligned} \qquad (19)$$

のとき，ζは狭義に正準であるという。

正則関数 (regular function)

つぎの二つの条件をみたす関数$f(X)$を正則関数という。

(1) 正準である。

(2) 任意の i, j $(1 \leq i, j \leq n)$ に対して

$\alpha > \beta$ なるすべての α, β ($\alpha, \beta = 0$ or 1 or 2) について，

$$f_{ij}(\alpha, \beta) \geq f_{ij}(\beta, \alpha) \quad \text{が成立するか，}$$

$\underbrace{\text{または，}}_{}$ $f_{ij}(\alpha, \beta) \leq f_{ij}(\beta, \alpha)$ が成立するかである。

$\alpha > \beta$ なるすべての α, β ($\alpha, \beta = 0$ or 1 or 2) について，

[命題 4.1] 任意の関数 $f(X)$ が正準でないとすると，変数の否定および，変数間の互換によって正準にしうる。

(証明) いま，x_i について $\varsigma_i(f) < p(f)_2 - p(f)_0$ とする。

$\bar{x}_i$ とすると [命題 3.1] より

$$\varsigma_i(f(x_1, x_2, \cdots, \bar{x}_i, \cdots, x_n)) = 2(p(f)_2 - p(f)_0) - \varsigma_i(f)$$

ゆえに，$2(p(f)_2 - p(f)_0) - \varsigma_i(f(x_1, x_2, \cdots, \bar{x}_i, \cdots, x_n)) < p(f)_2 - p(f)_0$

したがって，$p(f(x_1, x_2, \cdots, \bar{x}_i, \cdots, x_n))_2 - p(f(x_1, x_2, \cdots, \bar{x}_i, \cdots, x_n))_0$

$< \varsigma_i(f(x_1, x_2, \cdots, \bar{x}_i, \cdots, x_n))$ をうる。

また，$\varsigma_j(f) < \varsigma_i(f) \quad (j > i)$ とすると，

互換 $(x_i\ x_j)$ を行った $f(x_1, x_2, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$ を考える。[命題 3.2] より

$$\varsigma_i(f(x_1, x_2, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_n)) = \varsigma_j(f)$$

$$\varsigma_j(f(x_1, x_2, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_n)) = \varsigma_i(f)$$ である。

したがって，

$$\varsigma_i(f(x_1, x_2, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_n)) < \varsigma_j(f(x_1, x_2, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_n)) \quad (i < j)$$

となる。

[定理 4.1] $f(X)$ をしきい値関数とし，その重みを $w_1, w_2, \cdots, w_n$ とする。

(1) $w_i \geq 0$ ならば $\varsigma_i(f) \geq p(f)_2 - p(f)_0$

(2) $w_i \leq 0$ ならば $\varsigma_i(f) \leq p(f)_2 - p(f)_0$

(3) $w_i \leq w_j$ ならば $\varsigma_i(f) \leq \varsigma_j(f)$

(証明) (1) $w_i \geq 0$ とする。

しきい値を T_2, T_0 とする。いまもし, $x_i = 0$ で $f = 2$ となる格子点を $X = (x_1, x_2, \cdots, 0, \cdots, x_n)$ とすると,

$X' = (x_1, x_2, \cdots, 2, \cdots, x_n)$ として

$$w(X') = w(X) + 2w_i > T_2 + 2w_i \geq T_2$$ をうる。

ゆえに, 必ず $f(X') = 2$ となる。

これより, $$\zeta_i(F_2) \geq p(f)_2 \qquad (20)$$

をうる。

つぎに, $x_i = 2$ で $f = 0$ となる格子点を

$X = (x_1, x_2, \cdots, 2, \cdots, x_n)$ とする。

$X' = (x_1, x_2, \cdots, 0, \cdots, x_n)$ とすれば

$$w(X') = w(X) - 2w_i < T_0 - 2w_i \leq T_0$$

すなわち, $f(X') = 0$ をうる。

これより, $$\zeta_i(F_0) \leq p(f)_0 \qquad (21)$$

(20), (21) より

$$\zeta_i(f) = \zeta_i(F_2) - \zeta_i(F_0) \geq p(f)_2 - p(f)_0$$ をうる。

(2) $w_i \leq 0$ の場合も同様に示しうる。

(3) $w_i \leq w_j$ とする。

$x_i = \alpha$, $x_j = \beta$ ($\alpha > \beta$, $\alpha, \beta = 0$ or 1 or 2) において $f = 2$ となる格子点を

$X = (x_1, x_2, \cdots, x_i = \alpha, \cdots, x_j = \beta, \cdots, x_n)$ とする。

いま，$X' = (x_1, x_2, \cdots, x_i = \beta, \cdots, x_j = \alpha, \cdots, x_n)$ とすると

$w(X') = w(X) + (w_j - w_i)(\alpha - \beta) > T_2 + (w_j - w_i)(\alpha - \beta)$

$\geq T_2$ をうる．

ゆえに，$f(X') = 2$ となる．

これより $\zeta_i(F_2) \leq \zeta_j(F_2)$ (22)

つぎに，$x_i = \alpha$，$x_j = \beta$ $(\alpha < \beta)$ で $f = 0$ となる格子点を $X = (x_1, x_2, \cdots, x_i = \alpha, \cdots, x_j = \beta, \cdots, x_n)$ とする。

$X' = (x_1, x_2, \cdots, x_i = \beta, \cdots, x_j = \alpha, \cdots, x_n)$ として

$w(X') = w(X) + (w_j - w_i)(\alpha - \beta) < T_0 - (w_j - w_i)(\beta - \alpha) \leq T_0$ をうる。

ゆえに，$f(X') = 0$ となる．

これより $\zeta_i(F_0) \geq \zeta_j(F_0)$ (23)

(22), (23) より $\zeta_i(f) \leq \zeta_j(f)$ をうる．

この定理よりつぎの系は明らかであろう。

[系 4.1] $f(X)$ をしきい値関数とし，重みを w_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ とする。

(1) $\zeta_i(f) > p(f)_2 - p(f)_0$ ならば $w_i > 0$

(2) $\zeta_i(f) < p(f)_2 - p(f)_0$ ならば $w_i < 0$

(3) $\zeta_i(f) < \zeta_j(f)$ ならば $w_i < w_j$

[定理 4.2] 正則関数 $f(X)$ がしきい値関数であれば $f(X)$ は狭義に正準な整数完全分離系をもつ。

(証明) $f(X)$ はしきい値関数であるから [定理 2.2] より整数

完全分離系をもつ．これを

$$\zeta(w_1, w_2, \cdots, w_n ; T_2, T_0) \quad \text{とする。}$$

また，正準であるから

$$\begin{aligned} \zeta_i(f) &\geq p(f)_2 - p(f)_0 \\ \zeta_j(f) &\geq \zeta_i(f) \quad (j > i) \end{aligned} \tag{24}$$

が成立する．

そこで，k $(k \leq n)$ を

$k \geq i$ なる i に対して $\zeta_i(f) = p(f)_2 - p(f)_0$

$k < i$ なる i に対して $\zeta_i(f) > p(f)_2 - p(f)_0$

なる条件で決定される非負整数とする。

$k \geq i$ では $x_i \longrightarrow \bar{x}_i = y_i$

$k < i$ では $x_i \longrightarrow x_i = y_i$

なる変換を行い，

$f(X)$ に対して $f(Y)$ を考える。$(Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n))$

しきい値関数は明らかに unate であるから，[定理 3.2] より $f(X)$ は $x_1, x_2, \cdots, x_k$ について独立である。

ゆえに $\quad f(X) = f(Y) \quad$ をうる。

一方，$f(Y)$ の分離系は $\zeta'(w_1', w_2', \cdots w_k', \cdots ; w_n' ; T_2', T_0')$ とすると，[定理 1.1] より

$$w_i' = -w_i \ (i \leq k) \qquad w_i' = w_i \ (i > k)$$

$$T_2' = T_2 - 2(w_1 + w_2 + \cdots + w_k)$$

$$T_0' = T_0 - 2(w_1 + w_2 + \cdots + w_k) \qquad \text{である。}$$

また，［命題 1.3］より

$$w_i^* = w_i + w_i'$$

$$T_2^* = T_2 + T_2'$$

$$T_0^* = T_0 + T_0' \qquad \text{とすると，}$$

分離系 $\mathfrak{S}^*(w_1^*, w_2^*, \cdots, w_n^*; T_2^*, T_0^*)$ は $f(X)$ の整数完全分離系である。

ここで，$w_i^* = 0 \ (i \leq k)$，$w_i^* = 2w_i \ (i > k)$ であるが，［系 4.1］より $w_i > 0 \ (i > k)$ なるゆえに

$$w_i^* > 0 \ (i > k) \qquad \text{となる。}$$

つぎに，条件より $\zeta_i(f) \leq \zeta_j(f) \ (i < j)$ であるから，いま，ある r，s に対して $(k \leq r)$

$$\zeta_r(f) < \zeta_{r+1}(f) = \zeta_{r+2}(f) = \cdots = \zeta_{r+s}(f) < \zeta_{r+s+1}(f)$$

であると仮定する。

$f(X)$ は正則関数であるから，［定理 3.3］より $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_{r+s}$ に関して対称となる。

したがって，［命題 1.2］より

$$(w_1^*, w_2^*, \cdots, w_{r+1}^*, w_{r+2}^*, \cdots, w_{r+s}^*, \cdots, w_n^*; T_2^*, T_0^*)$$

$$(w_1^*, w_2^*, \cdots, w_{r+2}^*, w_{r+3}^*, \cdots, w_{r+1}^*, \cdots, w_n^*; T_2^*, T_0^*)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$(w_1^*, w_2^*, \cdots, w_{r+s}^*, w_{r+1}^*, \cdots, w_{r+s-1}^*, \cdots, w_n^*; T_2^*, T_0^*).$$

はすべて $f(X)$ の分離系となる。

ゆえに [命題 1.3] より

$(\varsigma w_1^*, \varsigma w_2^*, \cdots, \varsigma w_r^*, \alpha, \alpha, \cdots, \alpha, \varsigma w_{r+s+1}^*, \cdots, \varsigma w_n^*;\ \varsigma T_2^*, \varsigma T_0^*)$

もまた $f(X)$ の分離系である。

ここで、 $\alpha = w_{r+1}^* + w_{r+2}^* + \cdots + w_{r+s}^*$ である。

その分離系は明らかに (19) 式の条件をみたしている。

一般に $\varsigma_i(f) < \varsigma_{i+1}(f)$ となる i に対しては [系 4.1] より $w_i^* < w_{i+1}^*$ となるから $\varsigma w_i^* < \varsigma w_{i+1}^*$ をうる。

また、 $\varsigma_r(f) < \varsigma_{r+1}(f)$, $\varsigma_{r+s}(f) < \varsigma_{r+s+1}(f)$ であるから、同じく [系 4.1] より $w_r^* < w_{r+1}^*$, $w_{r+s}^* < w_{r+s+1}^*$ となる。

したがって、 $\varsigma w_r^* < \alpha < \varsigma w_{r+s+1}^*$ をうる。

ゆえに、分離系

$(\varsigma w_1^*, \varsigma w_2^*, \cdots, \varsigma w_r^*, \alpha, \alpha, \cdots, \alpha, \varsigma w_{r+s+1}^*, \cdots, \varsigma w_n^*;\ \varsigma T_2^*, \varsigma T_0^*)$ …… (25)

は明らかに狭義に正準となっている。

もし、他にもパラメーターが等しくなる所があっても全く同様にして、狭義に正準な分離系を作りうる。 (証明終)

§5. 結 論

まず、三値しきい値関数の分離系における公差を定義し、それを用いてしきい値関数の重み・しきい値が整数値をとりうることを示した。

ついで、三値論理関数についての特性パラメーターを定義

し，パラメーターがしきい値関数と一対一対応することと，パラメーターについて成立する定理を述べ，最後に，正則なしきい値関数は狭義に正準な整数分離系をもつことを示した。

三値しきい値関数の判定と実現に際しても，二値しきい値関数の場合と同様に，重みがすべて非負整数であること，対称な変数に対応する重みが等しいこと等を仮定し，また，重みの大小順序が決定しているとしてその判定と実現の手法を展開して行く方が手段を容易にするものと考えられる。

しきい値関数であれば正則関数の条件（2）は成立する。（[定理1.2]）　また，[命題4.1]により与えられた関数を正準にすることは可能である。しかも，正準にした関数ともとの関数の分離系の関係は[定理1.1]，[命題1.2]により明らかである。したがって，しきい値関数の判定と実現に際しては，最初から，狭義に正準な整数完全分離系をもつものと仮定してその手法を展開してよいことを[定理4.2]は示している。

最後に，本報告について有益なる助言をいただいた，京都大学工学部長谷川利治助教授，大阪大学基礎工学部北橋忠宏氏に感謝する。

文　　献

1) S. T. Hu ; "Threshold Logic" p.37 (University of California Press 1965)